EJERCICIOS 4

(1) Sea V un espacio vectorial finitodimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Sea N un operador lineal nilpotente. Use la descomposición cíclica para demostrar que hay una base $\mathcal{B}$ tal que $(N)_{\mathcal{B}}$ es en forma bloque como sigue

$$(N)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$$

tal que A_i es una matriz $n_i \times n_i$ y

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) Supóngase que T es un operador lineal sobre V finito dimensional sobre $\mathbb{F}$ y que

$$f_T = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

(es decir, el polinomio caractéristico se puede factorizar sobre $\mathbb{F}$ en factores lineales). Use el ejercicio anterior para demostrar que hay una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$(T)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$$

donde toda A_i es de la forma

$$A_i = \begin{bmatrix} J_1^{(i)} & & & \\ & J_2^{(i)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k^{(i)} \end{bmatrix}$$

donde toda $J_j^{(i)}$ es de la forma

$$J_j^{(i)} = \begin{bmatrix} c_i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & c_i & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_i & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c_i \end{bmatrix}.$$

Comentario: Esta forma de un operador se llama **la forma de Jordan**. Obsérvese que si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, los complejos, el supuesto es satisface para todo operador T. Es decir, sobre los complejos todo operador T tiene una forma de Jordan.

(3) Sea A la matriz compleja

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la forma de Jordan para A.

(4) Clasificar, por semejanza, todas las matrices complejas 3×3, tales que $A^3 = I$.

Comentario: Por 'clasificar', quiero decir que necesite dar una lista (finita) de matrices 3×3 tal que toda matriz A con $A^3 = I$ es semejante a una entrada única de la lista. Sugerencia: use la forma de Jordan.

(5) Clasificar, por semejanza, todas las matrices complejas $n\times n$, tales que $A^n = I$. ¿Cuál es el tamaño de la lista en este caso?

(6) Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{F}$ y define

$$\pi : V \to V, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

Un **código cíclico de tamaño** n es un subespacio cíclico por π. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, el cuerpo de tamaño 2 con elementos 0 y 1.

(1) Hallar una base por el código cíclico de tamaño 7 que contiene $v = 1101000$;[1]
(2) Hallar una base por el código cíclico de tamaño 6 que contiene $v = 010101$;
(3) Hallar una base por el código cíclico de tamaño 8 que contiene $v = 11011000$;
(4) Demostrar que si C el el código cíclico de tamaño 7 de (a), dos elementos distintos de C no pueden tener mayor de 4 entradas iguales.

Comentario: El código C de (a) y (d) es **el código (7,4) de Hamming** y, por la propiedad discutido en (d), es un ejemplo de un **código de corrección de errores**. Este sujeto es una buena fuente de aplicaciones de matrices cíclicas.

(7) Dar una demostración directa de que si A es la matriz asociada al polinomio mónico p, entonces p es el polinomio característico de A.

(8) Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base ordenada canónica por

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Hallar los vectores no nulos $v_1, \ldots, v_r$ que satisfacen las condiciones del teorema de descomposición cíclica.

(9) Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sea W el espacio nulo de $T - 2I$. Demostrar que W no tiene subespacio T-invariante complementario.

(10) Sea A la matriz real

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Hallar una matriz real P inversible, tal que $P^{-1}AP$ esté en la forma racional.

[1] Escribo 1101000 aquí por el elemento $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \in V$.