EJERCICIOS 5

(1) Supóngase que $\mathbb{F}$ es un cuerpo y que $f \in \mathbb{F}[x]$ es irreducible. Define

$$K = K(F, f) := \{r \in [\mathbf{X}] \mid \mathrm{grd}(\mathbf{r}) < \mathrm{grd}(\mathbf{f})\}.$$

(Recuerde que $\mathrm{grd}(0) = -\infty$, por definición, entonces $0 \in K$.) Define la suma y el producto de elementos de K ser la suma y el producto de polinomios usuales pero modulo f. Probar que K es un cuerpo.

(2) Sea $= \mathbb{Z}/\mathbf{3}\mathbb{Z}$ y $f = x^2 + 1$. Probar que f es irreducible y sea $K = K(F, f)$ el cuerpo como en Ejercicio 1. Calcule los inversos de x, $x+1$ y $2x$. Probar que

$$\sigma : K \to K, a + bx \mapsto a - bx$$

es un automorfismo.

(3) Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo, σ un automorfismo. Probar que
(1) $\sigma(1) = 1$ y $\sigma(0) = 0$;
(2) si $k = 1 + \cdots + 1$, entonces $\sigma(k) = k$;
(3) si $\sigma(k) = k$ y $\sigma(\ell) = \ell$, entonces $\sigma(k\ell) = k\ell$ y $\sigma(k/\ell) = k/\ell$.

Concluir que $\mathbb{Q}$ tiene un automorfismo único, la identidad.

(4) Sean $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbb{F}$. Supóngase que β es la forma bilineal tal que, con respecto al base estándar, tiene la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Escribir la matriz de β con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (1,2)\}.$$

(5) Sea V un espacio finitodimensional sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Sea Ω el conjunto de formas σ-sesquilineales, para σ un automorfismo fijado de $\mathbb{F}$. Define una relación $\sim$ sobre Ω como sigue: para $f, g \in \Omega$, escribe $f \sim g$ si hay bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{C}}$.

- Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia;
- Probar que $f \sim g$ si y solo si hay un operador lineal invertible $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $f = g_T$. Indicación: Recuerde la definición
$$g_T : V \times V \to \mathbb{F}, (x, y) \mapsto g(Tx, Ty).$$
- Supóngase que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y que σ es conjuagacion compleja. Probar que si f es un producto interno y $f \sim g$, entonces g es un producto interno.

(6) Sea $\langle , \rangle$ el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}^2$. Demostrar que no existe un operador lineal no nulo en $\mathbb{C}^2$ tal que $\langle v, Tv \rangle = 0$ para cada $v \in \mathbb{C}^2$. Generalizarlo.

(7) Sea V un espacio vectorial finitodimensional sobre $\mathbb{R}$. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre V. Para $v \in V$ define

$$\phi_v : V \to \mathbb{R}, w \mapsto \langle v, w \rangle.$$

Probar que la función

$$V \to V^*, v \mapsto \phi_v$$

es un isomorfismo lineal. Demostrar que, en general, la misma construcción no da una isomorfismo cuando $\dim(V) = \infty$.

(8) Sea V un espacio vectorial real o complejo con un producto interno. Demostrar que la forma cuadrática determinada por el producto interno cumple la **ley del paralelogram**

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$