EJERCICIOS 7

(1) (a) Si U y V son matrices unitarias en $M_n(\mathbb{C})$, demostrar que el producto UV es también unitaria.
(b) Si $U \in M_N(\mathbb{C})$ es una matriz unitaria, demostrar que U es inversible y que U^{-1} es también unitaria.[1]

(2) (a) Calcular los autovalores de la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una matriz *ortogonal* P cuyas columnas sean autovectores de A, de modo que $P^tAP = P^{-1}AP$ sea diagonal.
(b) Calcular A^5, usando esta forma diagonal $D = P^tAP$.

(3) Sean V un espacio producto interno finitodimensional, $\mathcal{B}$ una base ortonormal de V, $T : V \to V$ un operador lineal, $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Entonces $A = A^*$ implica que $T = T^*$.

(4) Sean $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Demostrar que el conjunto de matrices hermitianas / simétricas es una union de clases de σ-congruencia.

(5) Supóngase que $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ son matrices hermitianas.

- Probar que A es σ-congruente a A si y solo si A y B tienen las mismas inercias.
- Sea Ω el conjunto de matrices $n \times n$ hermitianas / simétricas. Contar el numero de clases de σ-congruencia en lo que Ω descompone.

(6) Sean $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$; $A, P \in M(n, \mathbb{F})$ con P unitaria. Demostrar que $(P^*AP)^*$ diagonal implica que A es normal.

(7) Determinar la inercia de la matrices

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

(8) Sea V un espacio producto interno finitodimensional. Un **operador positivo** es un operador autoadjunto tal que $\langle \boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{x}) \rangle \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in V$. Una **matriz positiva** es una matriz hermitiana tal que todas sus valores propios son no-negativos.
(a) Demostrar que $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador positivo si y solo si $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz positiva para toda base ortonormal $\mathcal{B}$.
(b) Si $T \in \mathcal{L}(V)$ es un operador positivo, demostrar que hay un polinomio $g(t) \in \mathbb{R}[t]$ tal que $g(T)$ es positivo y $g(T) \circ g(T) = T$.
Indicación: Buscar un polinomio que cumple $g(\mu_j) = \sqrt{\mu_j}$ para cada autovalor μ_j de T.
(c) Si $S \in \mathcal{L}(V)$ es otro operador positivo tal que $ST = TS$, demostrar que los operadores $S + T$ y ST son también positivos.
(d) Si $P, Q \in \mathcal{L}(V)$ son operadores positivos que no conmutan, demostrar que $P + Q$ es positivo pero que PQ no es necesariamente positivo.
Indicación: Dar un contraejemplo de dos matrices positivas cuyo producto no es una matriz positiva.

(9) Sea V un espacio producto interno finitodimensional.
Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de A, repetidos según su multiplicidad. Demostrar la desigualdad:

$$\operatorname{tr}(A^*A) \geq |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2,$$

[1] Las partes (a) y (b) dicen que la totalidad de matrices unitarias $n \times n$ es un *grupo*, llamado $U(n)$.

con igualdad si y sólo si A es una matriz normal.