EJERCICIOS 8

(1) Sea σ un automorfismo de un cuerpo $\mathbb{F}$ de característico k. Probar que

(1) σ^{-1} es un automorfismo de $\mathbb{F}$;
(2) $\mathrm{Fij}(\sigma) = \{x \in \mathbb{F} \mid x^\sigma = x\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{F}$;
(3) si W es un subespacio de $\mathbb{F}^n$ entonces $\sigma(W)$ es un subespacio de la misma dimensión;
(4) k es primo;
(5) Si V es un espacio vectorial sobre V y $\boldsymbol{v} \in V$, entonces $\underbrace{\boldsymbol{v} + \cdots + \boldsymbol{v}}_{k} = 0$.

(2) Sean f, g dos formas bilineales sobre V un espacio vectorial finitodimensional, con f no-degenerada. Demostrar que hay un único operador lineal $T : V \to V$ tal que

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y})) \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V.$$

Mostrar que T es biyectivo si y sólo si g también es no degenerada.

(3) Sea d una forma bilineal simétrica sobre V, un espacio vectorial finitodimensional. Para cada subespacio $M \leq V$, denótese por $M^\perp$ el subespacio ortogonal a M con respecto a d. Si N es otro subespacio de V, demostrar que $(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$.

Demostrar también que $(M \cap N)^\perp = M^\perp + N^\perp$ si d es no degenerada.

(4) Sean $\mu_1, \ldots, \mu_r$ los autovalores distintos de la matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$, en orden decreciente: $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_r$. Demostrar que la forma cuadrática $q(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}$ obedece

$$\mu_r \, \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} \leq \mu_1 \, \boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x},$$

y que los valores máximo y mínimo de $q(\boldsymbol{x})$ sobre la esfera $\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x} = 1$ son μ_1 y μ_r, respectivamente.

(5) Encontrar una matriz ortogonal $Q \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $Q^{-1} A Q$ sea diagonal, donde

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego, hallar los valores máximo y mínimo de la función $q(x,y,z) := x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(6) Expresar las formas cuadráticas reales siguientes como una combinación de cuadrados de formas lineales:[1]

(a) $q(x_1, x_2) = 4x_1x_2$,
(b) $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$,
(c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

Sea π un plano en $\mathbb{R}^3$. Describir la intersección con la superficie cuadrática de (a) (No quiero calculaciones detallas, solo una descripción cualitativa.)

(7) Dibujar los grafos siguientes:

(1) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 4y - 2 = 0$.
(2) $x^2 + 2xy - 3x - 4y - 2 = 0$.

[1] Hay un algoritmo para este proceso, se llama *reducción de Lagrange*. Pero podemos usar álgebra lineal directamente.

En los tres ejercicios siguientes sera conveniente definir la matriz $J_n \in M(n,\mathbb{F})$ (con n par) como sigue:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } J_n := \begin{bmatrix} J_2 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_2 \end{bmatrix}.$$

(8) Sea $f : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma alternante no-degenerada, donde $\dim(V) = 2$.

(1) Demostrar que hay una base $\{v,w\}$ de V tal que

$$f(v,v) = f(w,w) = 0,\ f(v,w) = 1,\ f(w,v) = -1$$

(2) Demostrar que el grupo de isometrías I_f es isomorfo al grupo de matrices

$$\mathrm{Sp_2(\mathbb{F}) := \{X \in GL(2,\mathbb{F}) \mid X^t \cdot J_2 \cdot X = J_2\}}$$

(donde la operación grupo es, como siempre, producto de matrices).

(9) Sean V finitodimensional y $f : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma alternante no-degenerada.

(1) Demostrar que hay un subespacio U de dimension 2 con base $\{v,w\}$ tal que

$$f(v,v) = f(w,w) = 0,\ f(v,w) = 1,\ f(w,v) = -1.$$

Concluir que la restricción $f|_U$ es una forma alternante no-degenerada.

(2) Sea $U^\perp$ el complemente ortogonal de U. Probar que $V = U \oplus U^\perp$ y que la restricción $f|_{U^\perp}$ es una forma alternante no-degenerada.

(3) Usar (1), (2) y inducción para demostrar que hay una base $\{v_1, w_1, \ldots, v_k, w_k\}$ tal que, para todo $i, j = 1, \ldots, k$,

$$f(v_i, v_j) = f(w_i, w_j) = 0,\ f(v_i, w_j) = \delta_{ij},\ f(w_i, v_j) = -\delta_{ij}.$$

Concluir, en particular, que $\dim(V)$ es par.

(4) Demostrar que el grupo de isometrías I_f es isomorfo al grupo de matrices

$$\mathrm{Sp_n(\mathbb{F}) := \{X \in GL(2,\mathbb{F}) \mid X^t \cdot J_n \cdot X = J_n\}}$$

(donde la operación grupo es, como siempre, producto de matrices).[2]

(10) Para la siguiente matriz antisimétrica $A \in M_4(\mathbb{F})$ encontrar una matriz inversible $P \in M_4(\mathbb{F})$ tal que $P^t A P = J_4$.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

(11) Demostrar que si A es una matriz simpléctica, entonces $\det(A) = 1$.

[2]Este grupo es *el grupo simpléctico de dimensión n sobre el cuerpo* $\mathbb{F}$. Los elementos de este grupo se llaman *matrices simplécticas*.