UNIVERSIDAD DE COSTA RICA | ESCUELA DE MATEMATICA

Álgebra lineal II | Examen Parcial 3

II Semestre 2014 | Nick Gill

Instrucciones: Puede usar cualesquiera de las proposiciones vistas en las lecciones incluidos los ejercicios. Escriba cuidadosamente y muy claramente las proposiciones que usa.

(1) Sea

- A la matriz real siguiente: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;
- $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$;
- $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal tal que $[f]_{\mathcal{E}} = A$.

(a) Encontrar una matriz *ortogonal* P tal que $P^t AP = P^{-1}AP$ sea diagonal.

(b) Calcular A^3, usando esta forma diagonal $D = P^t AP$.

(c) Calcular la inercia de A y encontrar una base $\mathcal{B}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con todas las entradas en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$.

Respuesta.

(a) El polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = (\lambda + 4)(\lambda - 5)^2$. Los espacios propios son:

- $V_{-4} = \langle (2, -1, 2) \rangle$;
- $V_5 = \langle (-1, 0, 1), (1, 2, 0) \rangle$.

Aplicamos Gram-Schmidt a estas dos bases y obtenemos

- $V_{-4} = \langle (2/3, -1/3, 2/3) \rangle$;
- $V_5 = \lambda(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}) \rangle$.

Entonces podemos tomar

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ y obtenemos que } P^T AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Now we observe that $A = PDP^t$ where D is the diagonal matrix above and so

$$A^3 = P \cdot D^3 \cdot P^T = \begin{bmatrix} 41 & 42 & -84 \\ 42 & 104 & 42 \\ -84 & 42 & 41 \end{bmatrix}.$$

(c) La inercia de $\{n_-, n_0, n_+\} = \{1, 0, 2\}$. Se define

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ y observamos que } S^T P^T APS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces podemos tomar $\mathcal{B}$, la base cuyos elementos son las columnas de PS.

(2) Sea $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, sea $V = \mathbb{F}^3$ y defina

$$f : V \times V \to \mathbb{F}, (x, y) \mapsto y^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot x.$$

(a) Probar que f es bilineal, no-degenerada y reflexiva.
(b) Sea $W = \langle (2, 0, 1) \rangle$ y calcular $W^\perp$.
(c) Decimos que un subespacio de V es *isotrópico* con respecto a la forma f si, para todo $u_1, u_2 \in U$, se tiene que $f(u_1, u_2) = 0$. Probar que el polinomio $g(x) = x^2 + x + 3 \in \mathbb{F}[x]$ es irreducible y probar que, si U es un subespacio isotrópico de V con respecto a la f, entonces $\dim(U) \leq 1$.

Respuesta.

(a) Sea A la matiz en la pregunta. Entonces $f(x, y) = y^T \cdot A \cdot X$ y la forma de la función implica directamente que f es bilineal. Además A es invertible, entonces f es no-degenerada. Al final, A es simétrica, entonces f es simétrica y entonces f es refléxiva.

(b) $W^\perp$ es igual al núcleo de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $W^\perp = \langle (5, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle$.

(c) Se puede verificar que $g(x) = x^2 + x + 3$ no tiene raices en $\mathbb{F}$, entonces g es irreducible. Supóngase que U es un subespacio isótropico de dimensón mayor que 1. En particular U intersecta el subespacio $X = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ no-trivialmente. Sea $x \in X \cap U \backslash \{0\}$. Entonces $x = (0, x_1, x_2)$ y $f(x, x) = 0$. Obtenemos que $x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2 = 0$. Si $x_2 \neq 0$, obtenemos que $(\frac{x_1}{x_2})^2 + \frac{x_1}{x_2} + 3 = 0$ y tenemos una contradicción del hecho que f es irreducible. Entonces $x_2 = 0$. Pero en este caso $x_1 = 0$ también y $x = 0$, una contradicción. Entonces $\dim(U) \leq 1$.

(3) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A, repetidos según su multiplicidad. Demostrar la desigualdad:

$$\operatorname{tr}(A^*A) \geq |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2,$$

con igualdad si y solo si A es una matriz normal.

Respuesta. Sea $V = \mathbb{C}^n$ con el producto interno canónico y $T : V \to V$ el operador tal que $[T]_{\mathcal{E}} = A$. Por un teorema de lecciones, sabemos que hay una base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. Equivalentamente, hay una matriz unitaria P tal que P^*AP es triangular. Ahora $(P^*AP)^* = P^*A^*P$ una matriz inferior. Pero observe que $\operatorname{tr}(A^*A) = \operatorname{tr}(P^*A^*AP)$ y $P^*A^*AP = (P^*A^*P) \cdot (P^*AP)$, ahora calculación directa confirma que

$$\operatorname{tr}(P^*A^*AP) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |B_{ij}|^2 \tag{1}$$

donde B_{ij} is the (i, j)-iésima entrada de P^*AP. Pero, ya que P^*AP es triangular, sabemos que la lista de las entradas $B_{11}, B_{22}, \ldots, B_{nn}$ es igual a lista de valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (podemos reordenar si necesario). La desigualdad sigue.

Si A es normal, podemos escoger P tal que P^*AP es diagonal. Ahora cuando $i \neq j$ tenemos $B_{ij} = 0$ y (1) nos da la igualdad que buscamos.

Por fin, supóngase que tenemos igualdad. Entonces (1) es verdadero todavía y concluimos que cuando $i \neq j$ tenemos $B_{ij} = 0$. Entonces P^*AP es diagonal y, por un teorema de lecciones, A es normal.

(4) Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix},$$
una matriz real. Se define la curva cuadrática
$$C_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3xy - 2y^2 + 6x + 2y + 8 = 0\}.$$

(a) Encontrar una matriz ortogonal P tal que $P^T AP$ sea diagonal.

(b) Encontrar un movimiento rigido T de $\mathbb{R}$ (con respecto al producto interno canónico) tal que $T(C_f)$ tenga la forma
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 + c = 0\}$$
para algunos números reales fijados $a, b, c \in \mathbb{R}$.

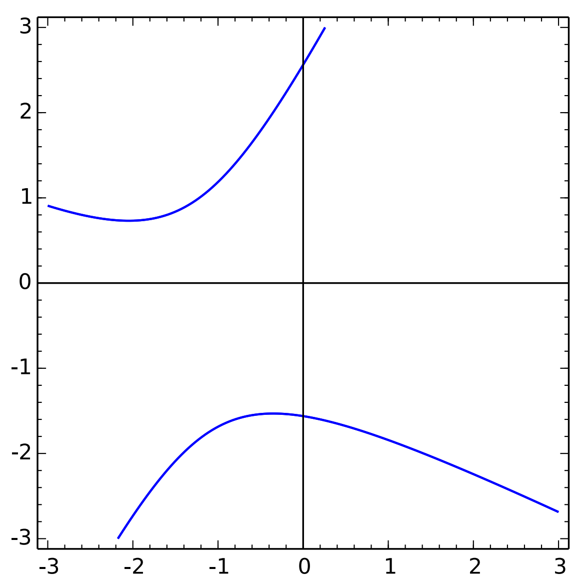
(c) Escribir T como una composición de una trasladación y una isometría y dibujar la curva C_f.

Respuesta.

(a) Los valores propios de A son $\pm\frac{5}{2}$. Podemos calcular vectores propios unitarios correspondientes y obtenemos que
$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

(b) Escribe
$$f(x) = x^T Ax + \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix} x + 8$$
y define $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_1^{-1}(x) = Px$. Entonces define
$$f_1(x) = (f \circ T_1^{-1}(x)) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 2\sqrt{10}x + 8.$$
Ahore define $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_2^{-1}(x) = x + v$ con $v = (\frac{-2\sqrt{10}}{5}, 0)$. Entonces define
$$f_2(x) = (f_1 \circ T_2^{-1}(x)) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 4$$
Ahora $(T_2 \circ T_1)(C_f) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(x) = 0\}$ como necesitamos.

(c) Por construcción $T = T_2 \circ T_1$ y T_2 es una isometría, T_1 una trasladación. Un dibujo:



(5) Sea

- $\mathbb{F}$ un cuerpo de característica diferente de 2;
- V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensión 2;
- $f : V \times V \to \mathbb{F}$ es una forma alternante no-degenerada;
- $J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M(2, \mathbb{F})$.

(a) Demostrar que hay una base $\{v, w\}$ de V tal que

$$f(v, v) = f(w, w) = 0, \ f(v, w) = 1, \ f(w, v) = -1.$$

(b) Demostrar que el grupo de isometrías I_f es isomorfo al grupo de matrices

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{F}) := \{X \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}) \mid X^T \cdot J_2 \cdot X = J_2\}.$$

(en donde la operación de grupo de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{F})$ es el producto de matrices).

(c) Demostrar que

$$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{F}) = \{X \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}) \mid \det(X) = 1\}.$$

Respuesta.

(a) Ya que f es no-degenerada, hay vectores v y w tal que $f(v', w) = a \neq 0$. Ahora sea $v = \frac{1}{a}v'$ y, por linealidad $f(v, w) = 1$. Ya que una forma alternante es anti-simétrica obtenemos que $f(w, v) = -1$. Al final $f(v, v) = v(w, w) = 0$ por la definición de 'alternante'.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{w, v\}$ donde v, w son de parte (a). Observe que $[f]_{\mathcal{B}} = J_2$. Sea $X = [T]_{\mathcal{B}}$ donde $T \in \mathcal{L}(V)$ y recuerde que $T \in \mathcal{L}(V)$ es una isometría de f si y solo si $f(v, w) = f(Tv, Tw)$ para todo $v, w \in V$. Entonces T es una isometría si y solo si

$$x^T J_2 y = (Xx)^T J_2 (Xy)$$

para todo $x, y \in V$. Obtenemos inmediatamente que T es una isometría si y solo si $J_2 = X^T J_2 X$.

Ahora recuerde que la función $\phi_{\mathcal{B}} : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}), T \mapsto [T]_{\mathcal{B}}$ es un isomorfismo. Entonces concluimos que la pre-imagen de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{F})$ bajo $\phi_{\mathcal{B}}$ es el grupo de isometrías de f y, además, que este grupo es isomorfo a $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{F})$ como necesitamos.

(c) Sea $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F})$. Ahora

$$X^T J_2 X = \begin{bmatrix} 0 & bc - ad \\ ad - bc & 0 \end{bmatrix}$$

y observe que $X^T J_2 X = J_2$ si y solo si $ad - bc = 1$.

(6) Sea

- $\mathbb{F}$ un cuerpo de característica diferente de 2;
- $M_n(\mathbb{F})$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$;
- $S = \{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid X \text{ es simétrica}\}$;
- $A = \{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid X \text{ es anti-simétrica}\}$;

(a) Probar que S y A son subespacios de $M_n(\mathbb{F})$ y que $M_n(\mathbb{F}) = S \oplus A$;

(b) Sea V un espacio vectorial finitodimensional sobre $\mathbb{F}$ y $f : V \times V \to \mathbb{F}$ una forma bilineal. Probar que hay únicas formas $f_S, f_A : V \times V \to \mathbb{F}$ tal que f_S es simétrica, f_A es alternante y $f(x, y) = f_S(x, y) + f_A(x, y)$ para todo $x, y \in V$.

Respuesta.

(a) Sea S_1, S_2 dos matrices simétricas, $c_1, c_2 \in bF$. Podemos ver facilmente que $c_1S_2 + c_2S_2$ es una matriz simétrica, entonces S es un subespacio de $M_n(\mathbb{F})$. Similarmente, A es un subespacio de $M_n(\mathbb{F})$. Además observe que $\dim(S) = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\dim(A) = \frac{n(n-1)}{2}$. Entonces $\dim(S) + \dim(A) = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{F})$ y, para probar que $M_n(\mathbb{F}) = S \oplus A$, es suficiente probar que $S \cap A = \{0\}$. Pero si una matriz X es simétrica y anti-simétrica, es obvio que $X = 0$. Hemos terminado.

(b) Ya que $M_n(\mathbb{F}) = S \oplus A$, toda matriz X es igual a $X_S + X_A$ done X_S es simétrica y X_A as anti-simétrica. Además X_S y X_A son definido univocamente. Ahora fije una base $\mathcal{B}$ de V y sea $X = [f]_{\mathcal{B}}$. Definimos f_S una forma tal que $[f_S]_{\mathcal{B}} = X_S$ y $[f_A] = X_A$. Es claro que f_S es simétrica, f_A es alternante, y $f(x, y) = f_S(x, Y) + f_A(x, y)$ para todo $x, y \in V$.